CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016

FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA")

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

MAJ 2016

Ogólne zasady oceniania

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0−3)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje wzór na logarytm potęgi i wzór na zamianę podstawy logarytmu (R1.b).

Przykładowe rozwiązanie

Stosujemy wzory na zamianę podstaw logarytmu zapisujemy liczbę $\log_{\sqrt{2}} 49$ w postaci $\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{\log_7 49}{\log_7 \sqrt{2}}$ i wykonujemy kolejne przekształcenia: $\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{2}{\log_7 \sqrt{2}}$.

Zauważamy, że jeżeli $\log_7 4 = a$ to $\log_7 4 = \log_7 \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4\log_7 \sqrt{2} = a$.

Zatem $\log_7 \sqrt{2} = \frac{a}{4}$.

Stąd wynika, że $\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{2}{\frac{a}{4}} = \frac{8}{a}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zdający:
- zastosuje twierdzenie o zamianie podstawy logarytmu, na przykład zapisze szukaną liczbę w postaci: $\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{2}{\log_7 \sqrt{2}}$ lub $\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{4}{\log_7 2}$

<u>albo</u>

- wyznaczy liczbę $\log_7 \sqrt{2}$ w zależności od *a*: $\log_7 \sqrt{2} = \frac{a}{4}$ lub liczbę $\log_7 2$ w zależności od *a*: $\log_7 2 = \frac{a}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający zastosuje twierdzenie o zamianie podstawy logarytmu, na przykład zapisze szukaną liczbę w postaci: $\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{2}{\log_7 \sqrt{2}}$ lub $\log_{\sqrt{2}} 49 = \frac{4}{\log_7 2}$ oraz wyznaczy liczbę $\log_7 \sqrt{2}$ w zależności od *a*: $\log_7 \sqrt{2} = \frac{a}{4}$ lub liczbę $\log_7 2$ w zależności od *a*: $\log_7 2 = \frac{a}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... **3 p.**

Zdający wyznaczy liczbę $\log_{\sqrt{2}} 49 : \frac{8}{a}$.

Zadanie 2. (0−5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian $x-a$, stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$ (R2.b). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności wielomianowe (R3.c).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Wielomian $W(x)=2x^3+mx^2-22x+n$ jest podzielny przez dwumiany $x+3$ i $x-4$, zatem

$$\begin{cases} W(-3)=0 \\ W(4)=0 \end{cases}.$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2\cdot(-3)^3+m\cdot(-3)^2-22\cdot(-3)+n=0 \\ 2\cdot 4^3+m\cdot 4^2-22\cdot 4+n=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot(-27)+9m+66+n=0 \\ 2\cdot 64+16m-88+n=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9m+n=-12 \\ 16m+n=-40 \end{cases}$$

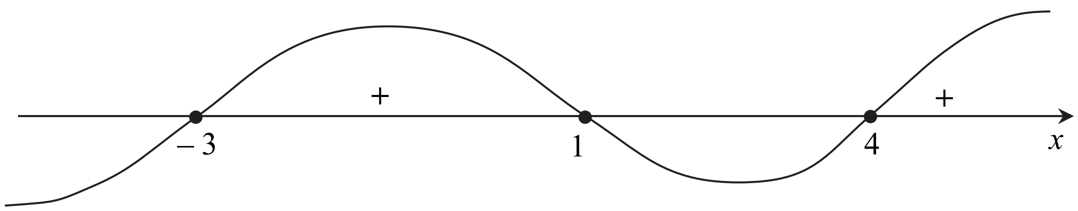
$$\begin{cases} m=-4 \\ n=24 \end{cases}$$

Zatem wielomian W ma postać $W(x)=2x^3-4x^2-22x+24$.

Rozwiązujemy nierówność $2x^3-4x^2-22x+24\geq 0$.

Po podzieleniu wielomianu W przez dwumian $x+3$ otrzymujemy iloraz $2x^2-10x+8$, który dzielimy przez dwumian $x-4$ i otrzymujemy iloraz $2x-2$. W rezultacie wielomian W możemy zapisać w postaci $W(x)=2(x+3)(x-1)(x-4)$. Pierwiastkami wielomianu W są liczby: -3, 1, 4.

Szkicujemy wykres wielomianu W, z którego odczytujemy rozwiązanie nierówności.



Zatem rozwiązaniem nierówności $x^3-2x^2-11x+12\geq 0$ jest każda liczba rzeczywista $x\in\langle -3,1\rangle\cup\langle 4,+\infty)$.

II sposób

Wielomian $W(x)=2x^3+mx^2-22x+n$ jest podzielny przez dwumiany $x+3$ i $x-4$, więc jest podzielny przez wielomian x^2-x-12.

Wykonujemy dzielenie $(2x^3+mx^2-22x+n):(x^2-x-12)$, otrzymujemy iloraz $2x+m+2$ oraz resztę $(4+m)x+12m+n+24$.

Wobec wspomnianej wyżej podzielności mamy $(4+m)x+12m+n+24=0$ dla każdego $x\in R$. Oznacza to, że spełniony musi być układ równań:

$$\begin{cases}4+m=0\\12m+n+24=0,\end{cases}$$

skąd otrzymamy

$$\begin{cases}m=-4\\n=24.\end{cases}$$

Dalsze rozumowanie jak w sposobie I rozwiązania.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zapisze układ równań, wynikający z podzielności wielomianu $W(x)=2x^3+mx^2-22x+n$ przez

- dwumiany $x+3$ i $x-4$: $\begin{cases}W(-3)=0\\W(4)=0.\end{cases}$

albo

- x^2-x-12: $\begin{cases}4+m=0\\12m+n+24=0.\end{cases}$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający obliczy współczynniki *m* i *n*: $m=-4$, $n=24$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania... 3 p.

Zdający wyznaczy trzeci pierwiastek wielomianu $W(x)=2x^3-4x^2-22x+24$: $x=1$ i zapisze wielomian w postaci iloczynowej: $W(x)=2(x+3)(x-1)(x-4)$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 p.

Zdający naszkicuje wykres wielomianu $W(x) = 2x^3 - 4x^2 - 22x + 24$.

Rozwiązanie pełne ....5 p.

Zdający wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności $2x^3 - 4x^2 - 22x + 24 \geq 0$:

$$\langle -3, 1\rangle \cup \langle 4, +\infty).$$

Zadanie 3. (0−4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.e).

Przykładowe rozwiązanie

Korzystając z „jedynki trygonometrycznej", sprowadzamy równanie

$$-2\cos^2 x + 3\sin x + 3 = 0.$$

do równania z jedną funkcją trygonometryczną:

$$-2(1-\sin^2 x) + 3\sin x + 3 = 0,$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0.$$

Wprowadzamy niewiadomą pomocniczą, np. $\sin x = t$, $t \in \langle -1, 1\rangle$.

Otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą t:

$$2t^2 + 3t + 1 = 0.$$

Rozwiązaniem równania są liczby $t_1 = -1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Powracając do podstawienia, otrzymujemy: $\sin x = -1$ lub $\sin x = -\frac{1}{2}$, a stąd dane równanie w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ ma rozwiązania:

$$x = \frac{3}{2}\pi \text{ lub } x = \frac{7}{6}\pi \text{ lub } x = \frac{11}{6}\pi.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający przekształci równanie $-2\cos^2 x + 3\sin x + 3 = 0$ do równania z jedną funkcją trygonometryczną np. $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.. 2 p.

Zdający rozwiąże równanie kwadratowe $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$: $\sin x = -1$ lub $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.. 3 p.

Zdający rozwiąże równanie $\sin x = -1$: $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ lub równanie $\sin x = -\frac{1}{2}$:

$$x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający rozwiąże oba równania: $\sin x = -1$ oraz $\sin x = -\frac{1}{2}$ uwzględniając podany przedział:

$$x = \frac{3}{2}\pi \text{ lub } x = \frac{7}{6}\pi \text{ lub } x = \frac{11}{6}\pi .$$

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozwiąże równanie kwadratowe z błędem, ale otrzyma dwa różne pierwiastki należące do przedziału $\langle -1, 1\rangle$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozwiąże równanie kwadratowe z błędem, ale otrzyma dwa różne pierwiastki i tylko jeden z nich należy do przedziału $\langle -1, 1\rangle$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 4. (0−6)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny, stosuje wzory na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym. (5.b,c).

Przykładowe rozwiązanie
Oznaczmy przez r różnicę ciągu arytmetycznego. Jeżeli drugi wyraz tego ciągu jest równy 4, to $a = 4 - r$, $b = 4 + r$ i $c = 4 + 2r$.
Przy tych oznaczeniach, ciąg geometryczny $(a, a+b, 4c)$ możemy zapisać następująco $(4-r, 8, 16+8r)$. Stąd otrzymujemy równanie

$$64 = (4-r)(16+8r).$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie $8r(r-2) = 0$. Rozwiązaniami tego równania są liczby $r = 0$ oraz $r = 2$.
Dla $r = 0$ otrzymujemy $a = b = c = 4$.
Dla $r = 2$ otrzymujemy $a = 2$, $b = 6$, $c = 8$.

Uwaga:
W rozwiązaniu można zapisać pierwszy i czwarty wyraz ciągu w zależności od trzeciego wyrazu ciągu arytmetycznego.

Jeżeli $a = 8 - b$ oraz $c = 2b - 4$, to ciąg geometryczny ma postać $(8-b, 8, 2b-4)$.

Wykorzystując własność ciągu geometrycznego, możemy zapisać równanie

$$64 = (8-b)(8b-16).$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby $b = 4$ oraz $b = 6$.

Gdy $b = 4$, to $a = 4$ i $c = 4$.

Gdy $b=6$, to $a=2$ i $c=8$.

Możemy też zapisać trzeci i czwarty wyraz ciągu w zależności od pierwszego wyrazu ciągu arytmetycznego.

Jeżeli $b=8-a$ oraz $c=12-2a$, to ciąg geometryczny ma postać $(a, 8, 48-8a)$.

Wykorzystując własność ciągu geometrycznego, możemy zapisać równanie

$$64=a(48-8a).$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby $a=2$ oraz $a=4$.

Gdy $a=2$, to $b=6$ i $c=8$.

Gdy $a=4$, to $b=4$ i $c=4$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający wykorzysta własności ciągu arytmetycznego i wprowadzi oznaczenia, np.:

$a=4-r$, $b=4+r$ i $c=4+2r$

lub

$a=8-b$ oraz $c=2b-4$,

lub

$b=8-a$ oraz $c=12-2a$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.. 2 p.

Zdający zapisze wyrazy ciągu geometrycznego z użyciem jednej niewiadomej, np.: $(4-r, 8, 16+8r)$ lub $(8-b, 8, 2b-4)$, lub $(a, 8, 48-8a)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający wykorzysta własności ciągu geometrycznego i zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $64=(4-r)(16+8r)$ lub $64=(8-b)(8b-16)$, lub $64=a(48-8a)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania i dodatkowy postęp na drodze do pełnego rozwiązania .... 4 p.

Zdający obliczy różnicę ciągu arytmetycznego w przynajmniej jednym przypadku lub wyznaczy jedną z liczb spośród *a*, *b*, *c* i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie do końca z błędami rachunkowymi, które nie przekreślają poprawności rozwiązania .... 5 p.

Zdający obliczy a, b i c

- tylko w jednym przypadku

  $a=4-r$, $b=4+r$ i $c=4+2r$

albo

- w dwóch przypadkach z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne .... 6 p.

Zdający obliczy *a*, *b*, *c* w obu przypadkach:
$a=b=c=4$ lub $a=2$, $b=6$, $c=8$.

Uwagi:

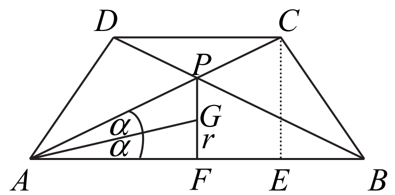
1. Jeżeli zdający tylko poda odpowiedź: $a=b=c=4$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający poda: $a=b=c=4$ lub $a=2$, $b=6$, $c=8$ i sprawdzi, że odpowiednie ciągi spełniają warunki zadania, to za całe rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający poda jako całe rozwiązanie: ciąg arytmetyczny: 2, 4, 6, 8, to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający poda jako całe rozwiązanie: ciąg arytmetyczny: 2, 4, 6, 8, a ciąg geometryczny: 2, 8, 32, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający poda jako całe rozwiązanie: ciąg arytmetyczny: 2, 4, 6, 8, albo 4, 4, 4, 4, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 5. (0−6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu oraz znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii (R7.a, 7.c).

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>



Wprowadzamy oznaczenia: $|\sphericalangle FAP| = 2\alpha$, $|FG| = r$.

W trapezie równoramiennym $ABCD$ mamy:

$$|AE| = \frac{|AB|+|CD|}{2} = \frac{84+36}{2} = 60 \text{ oraz } |BE| = \frac{|AB|-|CD|}{2} = \frac{84-36}{2} = 24.$$

Stosując twierdzenie Pitagorasa w trójkącie BEC, obliczamy wysokość CE trapezu

$|CE| = \sqrt{|BC|^2 - |BE|^2} = \sqrt{1600-576} = 32$.

W trójkącie AEC mamy $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{32}{60} = \frac{8}{15}$.

Korzystając ze wzoru na tangens podwojonego kąta, obliczamy kolejno:

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{8}{15},$$

$$15\operatorname{tg}\alpha = 4 - 4\operatorname{tg}^2\alpha,$$

$$4\operatorname{tg}^2\alpha + 15\operatorname{tg}\alpha - 4 = 0,$$

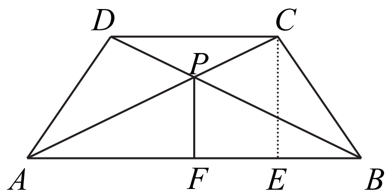
$$\Delta = 289,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-15+17}{8} = \frac{1}{4}.$$

Ujemne rozwiązanie odrzucamy, bo α jest kątem ostrym.
Obliczamy promień *r* okręgu wpisanego w trójkąt *ABP*:

$$r = |AF| \cdot \operatorname{tg}\alpha = 42 \cdot \frac{1}{4} = 10,5 .$$

<u>II sposób</u>



W trapezie równoramiennym *ABCD* mamy:

$$|AE| = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{84+36}{2} = 60 \text{ oraz } |BE| = \frac{|AB| - |CD|}{2} = \frac{84-36}{2} = 24 .$$

Ponadto $|AF| = |FB| = 42$.

Stosując twierdzenie Pitagorasa w trójkącie *BEC* obliczamy wysokość *CE* trapezu

$$|CE| = \sqrt{|BC|^2 - |BE|^2} = \sqrt{1600-576} = 32 .$$

Korzystając z podobieństwa trójkątów *AFP* i *AEC*, obliczamy wysokość *PF* trójkąta *ABP*.
Mamy

$$\frac{|PF|}{|AF|} = \frac{|CE|}{|AE|},$$

stąd $|PF| = \dfrac{42 \cdot 32}{60} = 22,4$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *AFP* obliczamy długość odcinka *AP*:

$$|AP| = \sqrt{42^2 + (22,4)^2} = 47,6 .$$

Następnie obliczamy pole trójkąta *ABP* i połowę jego obwodu:

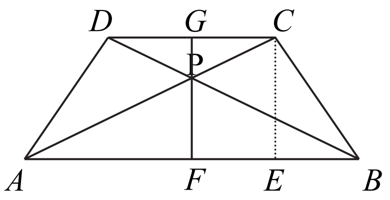
$$P_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 84 \cdot 22,4 = 940,8$$

$$p = \frac{47,6 + 47,6 + 84}{2} = 89,6 .$$

Korzystając ze wzoru na pole trójkąta w zależności od promienia okręgu wpisanego w trójkąt obliczamy promień okręgu wpisanego w trójkąt *ABP*:

$$r = \frac{P_{ABP}}{p} = \frac{940,8}{89,6} = 10,5 .$$

III sposób



Trójkąty ABP i CDP są podobne w skali $k=\frac{|AB|}{|CD|}=\frac{7}{3}$, stąd $\frac{|PF|}{|PG|}=\frac{7x}{3x}$

W trapezie równoramiennym $ABCD$ mamy:

$$|AE|=\frac{|AB|+|CD|}{2}=\frac{84+36}{2}=60 \text{ oraz } |BE|=\frac{|AB|-|CD|}{2}=\frac{84-36}{2}=24 .$$

Stosujemy twierdzenie Pitagorasa w trójkącie BEC i obliczamy wysokość CE trapezu:

$$|CE|=\sqrt{|BC|^2-|BE|^2}=\sqrt{1600-576}=32 .$$

Ponieważ $|PF|+|PG|=|CE|$, więc $7x+3x=32$, stąd $x=3,2$.

Zatem $|PF|=7x=22,4$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AFP obliczamy długość odcinka AP:

$$|AP|=\sqrt{42^2+(22,4)^2}=47,6 .$$

W trójkąt ABP wpisujemy okrąg o środku w punkcie O i promieniu KO, gdzie K jest punktem styczności okręgu z bokiem AP trójkąta. Zauważamy, że trójkąt PKO jest podobny do trójkąta AFP (cecha *kkk*).

Niech $|KO|=|OF|=r$, stąd $\frac{|KO|}{|PF|-|OF|}=\frac{|AF|}{|AP|}$.

Zatem $\frac{r}{22,4-r}=\frac{42}{47,6}$ i stąd $r=10,5$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający obliczy wysokość trapezu $|CE|=32$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający obliczy

- tangens kąta pomiędzy przekątną AC i podstawą AB trapezu: $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{8}{15}$

albo

- długość odcinka AP lub PF: $|AP|=47,6$, $|PF|=22,4$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp i w którym przedstawiono początek rozumowania prowadzącego do pokonania zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający

- obliczy pole trójkąta *ABP*, ale nie obliczy jego obwodu

albo

- nie obliczy pola trójkąta *ABP*, ale obliczy jego obwód,

albo

- uzasadni podobieństwo trójkątów *PKO* i *AFP*, ale nie zapisze poprawnie równania, z którego można wyznaczyć *r*.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 p.

Zdający

- zapisze równanie, z którego można obliczyć tangens połowy kąta pomiędzy przekątną *AC* i podstawą *AB* trapezu: $\frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}=\frac{8}{15}$

albo

- obliczy pole trójkąta *ABP* i jego obwód: $P_{ABP}=940,8$, $O=179,2$,

albo

- zauważy podobieństwo trójkątów *PKO* i *AFP* i zapisze równanie, z którego można wyznaczyć *r*, np. $\frac{r}{22,4-r}=\frac{42}{47,6}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 5 p.

Zdający obliczy

- tangens połowy kąta pomiędzy przekątną *AC* i podstawą *AB* trapezu: $\text{tg}\alpha=\frac{1}{4}$

albo

- promień okręgu z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne .... 6 p.

Zdający obliczy promień okręgu $r=10,5$.

Zadanie 6. (0−6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający podaje równanie prostej, mając dane dwa jej punkty lub jeden punkt i współczynnik *a* w równaniu kierunkowym, bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych, interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (8.b, c, d).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Wyznaczamy równanie prostej AB, korzystając ze wzoru na równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty: $(y-1)(6-1)-(2-1)(x-1)=0$.

$$5(y-1)-(x-1)=0,$$
$$5(y-1)=x-1.$$

Zatem prosta AB ma równanie $y=\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$.

Wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej AB, przechodzącej przez punkt M:

$$y=-5x+18.$$

Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty $A=(1,1)$ i $M=(3,3)$:

$$(y-1)(3-1)-(3-1)(x-1)=0,$$
$$2(y-1)-2(x-1)=0.$$

Zatem prosta AM ma równanie $y=x$.

Współczynnik kierunkowy prostej BC jest równy $a_2=-1$ i do prostej należy punkt B, więc równanie prostej ma postać $y=-x+8$.

Punkt $C=(x,y)$ jest punktem wspólnym prostych CM i BC, więc jego współrzędne wyznaczamy, rozwiązując układ równań $\begin{cases} y=-5x+18 \\ y=-x+8 \end{cases}$.

Zatem punkt C ma współrzędne $\left(\frac{5}{2},\frac{11}{2}\right)$.

Wyznaczamy pole trójkąta ABC. Można to zrobić różnymi metodami.

I metoda wyznaczania pola trójkąta ABC

Obliczamy długość odcinka AB: $|AB|=\sqrt{(6-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{26}$.

Wyznaczamy odległość h punktu C od prostej AB.

$$h=\frac{\left|\frac{5}{2}-5\cdot\frac{11}{2}+4\right|}{\sqrt{1^2+5^2}}=\frac{|-21|}{\sqrt{26}}$$

Wyznaczamy pole trójkąta ABC: $P=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{26}\cdot\frac{21}{\sqrt{26}}=\frac{21}{2}=10{,}5$.

Odp.: Pole trójkąta ABC jest równe $P=10{,}5$.

II metoda wyznaczania pola trójkąta ABC

Wyznaczamy pole trójkąta ABC, korzystając ze wzoru na pole trójkąta o wierzchołkach w punktach $A=(1,1)$ i $B=(6,2)$ i $C=\left(\frac{5}{2},\frac{11}{2}\right)$.

$$P=\frac{1}{2}\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)\right|=\frac{1}{2}\left|(6-1)\left(\frac{11}{2}-1\right)-(2-1)\left(\frac{5}{2}-1\right)\right|,$$

$$P=\frac{1}{2}|22{,}5-1{,}5|=10{,}5.$$

Odp.: Pole trójkąta ABC jest równe $P=10{,}5$.

III metoda wyznaczania pola trójkąta ABC

Wyznaczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}=[5,1]$ i $\overrightarrow{AC}=\left[\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right]$.

Wyznaczamy pole trójkąta ABC, korzystając ze wzoru

$$P=\frac{1}{2}\left|d\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1{,}5 & 4{,}5\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(22{,}5-1{,}5)=10{,}5$$

Odp.: Pole trójkąta ABC jest równe $P=10{,}5$.

II sposób

Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty $A=(1,1)$ i $M=(3,3)$:

$$(y-1)(3-1)-(3-1)(x-1)=0,$$
$$2(y-1)-2(x-1)=0.$$

Zatem prosta AM ma równanie $y=x$.

Wyznaczamy równanie prostej przechodzącej przez punkty $B=(6,2)$ i $M=(3,3)$:

$$(y-2)(3-6)-(3-2)(x-6)=0,$$
$$-3(y-2)-(x-6)=0.$$

Zatem prosta BM ma równanie $y=-\frac{1}{3}x+4$.

Wyznaczamy równania prostych, zawierających boki AC i BC trójkąta, które są prostopadłe odpowiednio do prostych: BM i AM.

Współczynnik kierunkowy prostej AC jest równy $a_1=3$ i do prostej należy punkt A, więc równanie prostej ma postać $y=3x-2$.

Współczynnik kierunkowy prostej BC jest równy $a_2=-1$ i do prostej należy punkt B, więc równanie prostej ma postać $y=-x+8$.

Punkt $C=(x,y)$ jest punktem wspólnym prostych AC i BC, więc jego współrzędne wyznaczamy, rozwiązując układ równań $\begin{cases}y=3x-2\\ y=-x+8\end{cases}$.

$$3x-2=-x+8,$$
$$x=2{,}5,$$
$$y=5{,}5.$$

Zatem punkt C ma współrzędne $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

Wyznaczamy pole trójkąta ABC jak w I sposobie rozwiązania.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania………………..……………………..…………………………... 1 p.
Zdający

- wyznaczy równanie prostej AB : $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

albo

- wyznaczy równanie prostej AM : $y = x$,

albo

- wyznaczy równanie prostej BM : $y = -\frac{1}{3}x + 4$,

albo

- obliczy długość odcinka AB: $|AB| = \sqrt{26}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp……………………………………………... 2 p.
Zdający

- wyznaczy równania prostych AB : $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$ i AM : $y = x$

albo

- wyznaczy równania prostych AM : $y = x$ i BM : $y = -\frac{1}{3}x + 4$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp i w którym przedstawiono początek rozumowania prowadzącego do pokonania zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający wyznaczy równania prostych zawierających boki AC i BC i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania……………………………………..… 4 p.

Zdający wyznaczy współrzędne punktu $C = \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ……………………………..…... 5 p.
Zdający

- wyznaczy odległość h punktu C od prostej AB : $h = \frac{21}{\sqrt{26}}$ i na tym zakończy

albo

- popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca.

Rozwiązanie pełne ………………………………………………………………… 6 p.
Zdający wyznaczy pole trójkąta ABC : $P = 10{,}5$.

Uwagi:

1. Jeśli zdający wyznaczy równania prostych zawierających boki AC i BC i na tym poprzestanie, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający obliczy długość $|AB|$ i wyznaczy równanie prostej AB, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 7. (0−3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Ponieważ liczba a przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1, więc $a = 6k+1$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną.
Ponieważ liczba b przy dzieleniu przez 6 daje resztę 5, więc $b = 6l+5$, gdzie l jest liczbą całkowitą nieujemną.
Wtedy $a^2 - b^2 = (6k+1)^2 - (6l+5)^2 = (6k+6l+6)(6k-6l-4) = 12(k+l+1)(3k-3l-2)$.

Wykazaliśmy, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 12. Należy jeszcze wykazać, że przynajmniej jedna z liczb $k+l+1$ lub $3k-3l-2$ jest podzielna przez 2.
Jeśli liczby całkowite k i l są jednakowej parzystości, to liczba $k-l$ jest parzysta oraz liczba $3k-3l-2 = 3(k-l)-2$ jest parzysta, jako różnica dwóch liczb parzystych.

Jeśli liczby całkowite k i l są różnej parzystości, to liczba $k+l+1$ jest parzysta, jako suma dwóch liczb nieparzystych i jednej parzystej. To kończy dowód.

II sposób

Ponieważ liczba a przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1, więc $a = 6k+1$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną.
Ponieważ liczba b przy dzieleniu przez 6 daje resztę 5, więc $b = 6l-1$, gdzie l jest liczbą całkowitą nieujemną.
Wtedy $a^2 - b^2 = (6k+1)^2 - (6l-1)^2 = (6k+6l)(6k-6l+2) = 12(k+l)(3k-3l+1)$.

Wykazaliśmy, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 12. Należy jeszcze wykazać, że przynajmniej jedna z liczb $k+l$ lub $3k-3l+1$ jest podzielna przez 2.
Jeśli liczby całkowite k i l są jednakowej parzystości, to liczba $k+l$ jest parzysta.
Jeśli liczby całkowite k i l są różnej parzystości, to liczba $k-l$ jest nieparzysta, więc liczba $3k-3l+1 = 3(k-l)+1$ jest parzysta. To kończy dowód.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.
Zdający zapisze liczbę $a^2 - b^2$ w postaci $12(k+l+1)(3k-3l-2)$ lub w postaci $12(k+l)(3k-3l+1)$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.
Zdający

- uzasadni parzystość jednej z liczb $k+l+1$ lub $3k-3l-2$ w jednym z przypadków w zależności od parzystości liczb k i l

albo

- uzasadni parzystość jednej z liczb $k+l$ lub $3k-3l+1$ w jednym z przypadków w zależności od parzystości liczb k i l.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.
Zdający uzasadni podzielność liczby a^2-b^2 przez 24.

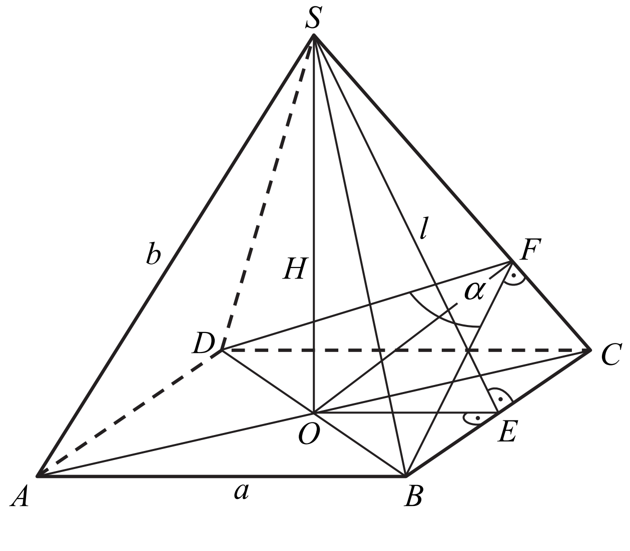
Uwaga:
Jeżeli zdający rozważa tylko szczególne przypadki, np. przyjmie $a=6k+1$ oraz $b=6k+5$ i wyznaczy $a^2-b^2=(6k+1)^2-(6k+5)^2 == 24(-2k-1)$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów.**

Zadanie 8. (0−6)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).

Przykładowe rozwiązanie

Strategię rozwiązania zadania można zrealizować na wiele sposobów. Każdy z nich różni się zestawem i kolejnością zastosowanych związków między odcinkami w ostrosłupie. Przyjmijmy następujące oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy $|OB|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|OE|=\frac{a}{2}$, $|\sphericalangle BFO|=60^\circ$.

Ponieważ trójkąt BFO jest prostokątny, stąd $\frac{|BO|}{|BF|}=\sin 60^\circ$.

Zatem

$$|BF| = \frac{|BO|}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trójkąty SEC i BFC są podobne, stąd $\frac{|SE|}{|SC|} = \frac{|BF|}{|BC|}$, czyli $\frac{l}{b} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a}$. Zatem $l = \frac{b\sqrt{6}}{3}$.

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach prostokątnych EOS i BOS, skąd otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b\sqrt{6}}{3}\right)^2 \\ H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b\sqrt{6}}{3}\right)^2 \\ 25 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25 + \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2}{3} \\ 25 + \frac{a^2}{2} = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 300 + 3a^2 = 8b^2 \\ 50 + a^2 = 2b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = 75 \\ a^2 = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 5\sqrt{3} \\ a = 10 \end{cases}$$

Stąd pole P podstawy $ABCD$ ostrosłupa jest równe $P = a^2 = 100$, więc objętość ostrosłupa jest równa: $V = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 5 = \frac{500}{3}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający

- zastosuje twierdzenie Pitagorasa w trójkącie SOC

albo

- zastosuje twierdzenie Pitagorasa w trójkącie *SOE*,

albo

- zastosuje twierdzenie cosinusów w trójkącie *BFD*,

albo

- zapisze funkcję trygonometryczną kąta ostrego w trójkącie *OBF*,

albo

- zapisze proporcję wynikającą z podobieństwa trójkątów *SEC* i *BCF*,

albo

- zapisze proporcję wynikającą z podobieństwa trójkątów *SOC* i *OFC*

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Uwaga:
Jeżeli zdający zapisze związki, z których można obliczyć długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa, ale pominie jedno równanie potrzebne do zakończenia obliczeń, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 3 p.
Zdający zapisze układ równań, z którego można obliczyć długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 p.
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą oznaczającą wielkość, która pozwala obliczyć pole podstawy ostrosłupa i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 5 p.

Zdający

- obliczy długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa

albo

- obliczy długość krawędzi podstawy lub długość przekątnej podstawy ostrosłupa, popełniając błędy rachunkowe i konsekwentnie do tego obliczy objętość ostrosłupa.

Rozwiązanie pełne .... 6 p.

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V = \frac{500}{3}$.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający rozpatruje inną bryłę, np. ostrosłup, którego podstawą nie jest kwadrat albo ostrosłup, którego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi, ale przy korzystaniu z własności figur, w których ten kąt nie występuje, wykazuje się innymi umiejętnościami matematycznymi, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający odczyta wartość $\sin\sphericalangle BFO = \sin 60^\circ$ z tablic i wykona obliczenia na przybliżeniach, to otrzymuje co najwyżej **5 punktów**.

Zadanie 9. (0−3)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii (7.c).

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, niech ponadto r_S oznacza promień okręgu o środku w punkcie *S* i średnicy *AB*.

Wtedy $|AB| = 2(|AK| + |LB|)$ oraz $r_S = |AS| = \frac{1}{2}|AB|$ i $|KS| = \frac{1}{4}|AB| = \frac{1}{2}r_S$.

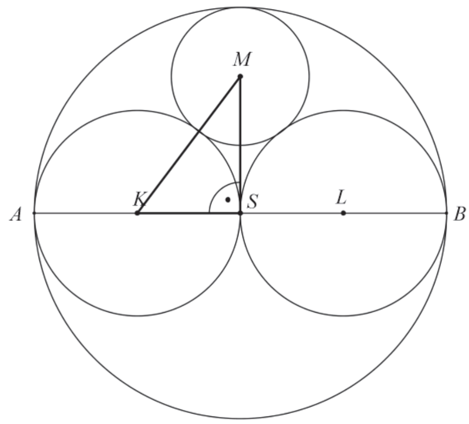
Trójkąt *KLM* jest trójkątem równoramiennym, którego podstawą jest odcinek *KL*. Punkt *S* jest środkiem odcinka *KL*.

Zatem punkty *K*, *S*, *M* są wierzchołkami trójkąta prostokątnego, w którym

$|KS|^2 + |MS|^2 = |KM|^2$ przy czym $|MS| = \frac{1}{2}|AB| - r = r_S - r$

oraz

$|KM| = \frac{1}{4}|AB| + r = \frac{1}{2}r_S + r$,



Stąd mamy kolejno:

$$\left(\frac{1}{2}r_S\right)^2 + (r_S - r)^2 = \left(\frac{1}{2}r_S + r\right)^2,$$

$$\frac{1}{4}r_S^2 + r_S^2 - 2r_S \cdot r + r^2 = \frac{1}{4}r_S^2 + r_S \cdot r + r^2,$$

$$r_S^2 = 3r_S \cdot r.$$

Po wykorzystaniu zależności $\frac{1}{2}|AB| = r_S$ otrzymujemy: $\dfrac{3r}{\frac{1}{2}|AB|} = 1$.

Zatem $r = \frac{1}{6}|AB|$, co kończy dowód.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zdający zauważy, że trójkąt *KSM* jest trójkątem prostokątnym i zapisze długości boków tego trójkąta

- w zależności od długości odcinka *AB*:

  $|KS| = \frac{1}{4}|AB|$, $|MS| = \frac{1}{2}|AB| - r$, $|KM| = \frac{1}{4}|AB| + r$

albo

- w zależności od promienia r_S:

  $|KS| = \frac{1}{2}r_S$, $|MS| = r_S - r$, $|KM| = \frac{1}{2}r_S + r$ oraz $\frac{1}{2}|AB| = r_S$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.
Zdający zapisze równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *KSM*,

$$\text{np. } \left(\frac{1}{2}r_S\right)^2+\left(r_S-r\right)^2=\left(\frac{1}{2}r_S+r\right)^2,$$

i przekształci do postaci umożliwiającej wyznaczenie szukanej zależności np. $r_S^2=3r_S\cdot r$.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.
Zdający wykaże, że $r=\frac{1}{6}|AB|$.

Zadanie 10. (0−5)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych oraz wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (R10, 10.d).

Przykładowe rozwiązanie

Obliczymy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=\binom{20}{3}=1140$.

Zdarzenie *A* polega na tym, że co najmniej dwie z wylosowanych kul są tego samego koloru.

Ustalamy moc zdarzenia *A*: $|A|=\binom{9}{2}\cdot\binom{11}{1}+\binom{9}{2}\cdot\binom{11}{1}+\binom{2}{2}\cdot\binom{18}{1}+\binom{9}{3}\cdot\binom{11}{0}+\binom{9}{3}\cdot\binom{11}{0}=978$.

Obliczamy szukane prawdopodobieństwo, korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{489}{570}=\frac{163}{190}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający

- zapisze moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=\binom{20}{3}$

albo

- zapisze moc zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A* lub zdarzeniu przeciwnemu do *A*:
$$|A|=\binom{9}{2}\cdot\binom{11}{1}\cdot 2+\binom{2}{2}\cdot\binom{18}{1}+\binom{9}{3}\cdot\binom{11}{0}\cdot 2 \text{ lub} |A'|=\binom{9}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{1},$$

albo

- narysuje drzewo ilustrujące przebieg doświadczenia (na rysunku muszą wystąpić wszystkie istotne gałęzie dla danego zdarzenia *A* lub dla zdarzenia do niego przeciwnego *A'*).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający

- zapisze moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \binom{20}{3}$ i moc zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A lub zdarzeniu przeciwnemu do A: $|A| = \binom{9}{2}\cdot\binom{11}{1}\cdot 2 + \binom{2}{2}\cdot\binom{18}{1} + \binom{9}{3}\cdot\binom{11}{0}\cdot 2$ lub $|A'| = \binom{9}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{1}$
- narysuje drzewo ze wszystkimi istotnymi gałęziami i zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich istotnych odcinkach jednego z etapów lub na jednej z istotnych gałęzi.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający

- obliczy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 1140$ i moc zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A lub zdarzeniu przeciwnemu do A: $|A| = 978$ lub $|A'| = 162$

albo

- obliczy prawdopodobieństwo wzdłuż jednej istotnej gałęzi: np. $\frac{9}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{2}{18}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 p.
Zdający

- obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego do zdarzenia A: $\frac{9}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{2}{18}\cdot 6 = \frac{81}{570}$ i nie obliczy prawdopodobieństwa zdarzenia A

albo

- obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{489}{570}$.

Zadanie 11. (0−3)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (R10).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Miejsce dla cyfry 1 wybieramy na $\binom{10}{3}$ sposobów. Na pozostałych siedmiu miejscach rozmieszczamy cyfry 2 lub 3 w dowolnym porządku na 2^7 sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$\binom{10}{3}\cdot 2^7 = 120\cdot 128 = 15360$$

różnych liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy.

II sposób

Rozpatrzymy trzy rozłączne przypadki, w zależności od tego, jaka cyfra została zapisana na pierwszym miejscu.

1. Jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 1, to miejsce dla pozostałych dwóch jedynek wybieramy na $\binom{9}{2}$ sposobów, na pozostałych siedmiu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na 2^7 sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1\cdot\binom{9}{2}\cdot 2^7 = 36\cdot 128 = 4608$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 1.

2. jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 2, to miejsce dla trzech jedynek wybieramy na $\binom{9}{3}$ sposobów, na pozostałych sześciu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na 2^6 sposobów. Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1\cdot\binom{9}{3}\cdot 2^6 = 84\cdot 64 = 5376$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 2.

3. (rozumowanie analogiczne jak w p. 2.). Jeżeli na pierwszym miejscu jest cyfra 3, to miejsce dla trzech jedynek wybieramy na $\binom{9}{3}$ sposobów, na pozostałych sześciu miejscach rozmieszczamy cyfrę 2 lub cyfrę 3 w dowolnym porządku na 2^6 sposobów.
Stosujemy regułę mnożenia i otrzymujemy

$$1\cdot\binom{9}{3}\cdot 2^6 = 84\cdot 64 = 5376$$

liczb dziesięciocyfrowych, które można zapisać za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje w dokładnie trzy razy, przy czym na pierwszym miejscu jest cyfra 3.
Sumujemy liczby powstałe w każdym z trzech przypadków i otrzymujemy:

$$4608 + 2\cdot 5376 = 15360$$

liczb dziesięciocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy.

III sposób

Rozpatrzymy osiem rozłącznych przypadków, wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy:

1. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki i 7 trójek, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 7!}=120$,
2. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 1 dwójka i 6 trójek, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 6!}=840$,
3. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 2 dwójki i 5 trójek, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 5!}=2520$,
4. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 3 dwójki i 4 trójki, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 3!\cdot 4!}=4200$,
5. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 4 dwójki i 3 trójki, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 4!\cdot 3!}=4200$,
6. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 5 dwójek i 2 trójki, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 5!\cdot 2!}=2520$,
7. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki, 6 dwójek i 1 trójka, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 6!}=840$,
8. w zapisie tej liczby występują 3 jedynki i 7 dwójek, wtedy takich liczb jest $\frac{10!}{3!\cdot 7!}=120$.

Sumujemy liczby otrzymane w każdym przypadku i otrzymujemy:

$$2\cdot(120+840+2520+4200)=2\cdot 7680=15360$$

różnych liczb dziesięciocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zdający zapisze, że:

- miejsce dla cyfry 1 można wybrać na $\binom{10}{3}$ sposobów

albo

- miejsca dla cyfr 2 lub 3 można wybrać na $\binom{10}{7}$ sposobów,

albo

- cyfry 2 lub 3 można rozmieścić na 2^7 sposobów, albo

- jeżeli cyfra 1 jest na ustalonym (np. pierwszym) miejscu, to pozostałe dwie cyfry 1 można rozmieścić na $\binom{9}{2}$ sposobów,

albo

- jeżeli na ustalonym miejscu stoi jedna z cyfr 2 lub 3, to trzy cyfry 1 można rozmieścić na $\binom{9}{3}$ sposobów,

albo

- jeżeli cyfry 1 stoją na ustalonych trzech miejscach, to jeśli w liczbie występuje n cyfr 2, to cyfry 2 i 3 można rozmieścić na $\binom{7}{n}$ sposobów dla przynajmniej jednej konkretnej liczby n,

albo

- jest 8 rozłącznych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.
Zdający

- zapisze, że liczba rozpatrywanych liczb dziesięciocyfrowych jest równa np. $\binom{10}{3}\cdot 2^7$

albo

- zapisze, ile jest liczb w każdym z rozpatrywanych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy,

albo

- zapisze osiem rozłącznych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy oraz w przynajmniej jednym przypadku zapisze liczbę takich liczb, np. $\binom{10}{3}\cdot 1$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.
Zdający

- zapisze, że jest $\binom{10}{3}\cdot 2^7 = 15360$ liczb dziesięciocyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą cyfr 1, 2, 3, w zapisie których cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy

albo

- zsumuje liczby otrzymane w każdym z rozpatrywanych przypadków wyczerpujących wszystkie możliwości zapisu liczby dziesięciocyfrowej za pomocą cyfr 1, 2, 3, w których zapisie cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy i zapisze, że jest ich 15360.

Uwagi:

1. Rozwiązanie uznajemy za pełne, jeżeli zdający zapisze liczbę rozpatrywanych liczb dziesięciocyfrowych bez użycia symbolu Newtona.
2. Jeżeli zdający w swoim rozwiązaniu przedstawia zapisy, dla których brak bezpośredniej interpretacji kombinatorycznej i zapisom tym nie towarzyszą stosowne objaśnienia, to nie może otrzymać maksymalnej liczby punktów, przy czym za rozwiązanie, zawierające

jedynie zapisy pojedynczych liczb lub symboli Newtona (typu 120, 128, $\binom{10}{7}$), bez stosownych objaśnień, zdający otrzymuje **0 punktów**, a za rozwiązanie, zawierające jedynie zapisy działań na liczbach (typu $120 \cdot 128 = 15\,360$), bez stosownych objaśnień zdający może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

3. Jeżeli zdający przedstawia rozwiązanie, w którym części zapisanych liczb lub działań na liczbach nie towarzyszą stosowne objaśnienia, to za takie rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
4. Zdający może skorzystać ze wzoru dwumianowego Newtona i zapisać:
$\binom{10}{3} \cdot \left\{ \binom{7}{7} + \binom{7}{6} + \binom{7}{5} + \binom{7}{4} + \binom{7}{3} + \binom{7}{2} + \binom{7}{1} + \binom{7}{0} \right\} = \binom{10}{3} \cdot 2^7 = 120 \cdot 128 = 15360$.