

**EGZAMIN GIMNAZJALNY
W ROKU SZKOLNYM 2013/2014**

**CZĘŚĆ MATEMATYCZNO-PRZYRODNICZA
MATEMATYKA**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ I SCHEMATY PUNKTOWANIA

ARKUSZ GM-M5-142

KWIECIEŃ 2014

Zadania zamknięte

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Zasady przyznawania punktów
1.	C	<ul style="list-style-type: none">• poprawna odpowiedź – 1 pkt• błędna odpowiedź lub brak odpowiedzi – 0 pkt
2.	D	
3.	PP	
4.	B	
5.	B	
6.	D	
7.	A	
8.	B	
9.	B	
10.	D	
11.	C	
12.	A	
13.	B	
14.	FF	
15.	D	
16.	PP	
17.	C	
18.	A	
19.	NC	
20.	C	

Zadania otwarte

UWAGA

- Za każde inne niż przedstawione poprawne rozwiązanie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
- Jeśli na jakimkolwiek etapie rozwiązania zadania popełniono jeden lub więcej błędów rachunkowych, ale zastosowane metody były poprawne, to obniżmy ocenę całego rozwiązania o 1 punkt.

Zadanie 21. (0–3)

Przykładowe sposoby rozwiązania

I sposób

Koszt korzystania z basenu bez karty rabatowej:

$$12 \cdot 16 = 192 \text{ (zł)}$$

Koszt korzystania z basenu z kartą rabatową:

$$8 \cdot 10 + 9 \cdot 6 = 80 + 54 = 134 \text{ (zł)}$$

$$50 + 134 = 184 \text{ (zł)}$$

$$184 \text{ zł} < 192 \text{ zł}$$

Odpowiedź. Zakup karty rabatowej był dla Wojtka opłacalny.

II sposób

Kwota zaoszczędzona dzięki zakupowi karty rabatowej:

$$(12 - 8) \cdot 10 = 40 \text{ (zł)}$$

$$(12 - 9) \cdot 6 = 18 \text{ (zł)}$$

$$40 + 18 = 58 \text{ (zł)}$$

Koszt zakupu karty jest równy 50 zł.

$$50 \text{ zł} < 58 \text{ zł}$$

Koszt zakupu karty rabatowej jest niższy niż kwota zaoszczędzona przy opłacie za 16 godzin pływania.

Odpowiedź. Zakup karty rabatowej był opłacalny.

Poziom wykonania

P₆ – 3 punkty – pełne rozwiązanie

zapisanie wniosku wynikającego z poprawnych obliczeń

P_{5,4} – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część rozwiązania zawiera usterki (błędy rachunkowe, niedokonanie wyboru właściwych rozwiązań itp.)

obliczenie kosztów korzystania z basenu w obu przypadkach, ale bez zapisania wniosku (bez porównania liczb 192 i 184)

lub

poprawny sposób obliczenia kosztu korzystania z basenu przy zakupie karty rabatowej z uwzględnieniem kosztu jej zakupu i poprawny sposób obliczenia kosztu korzystania z basenu bez karty rabatowej

lub

obliczenie kwoty zaoszczędzonej dzięki zakupowi karty rabatowej bez uwzględnienia kosztu zakupu karty (58 zł)

P₂ – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane

obliczenie kosztu korzystania z basenu bez karty rabatowej (192 zł)

lub

obliczenie kosztu korzystania z basenu z kartą rabatową bez uwzględnienia kosztu zakupu karty (134 zł)

lub

poprawny sposób obliczenia kosztu korzystania z basenu z kartą rabatową z uwzględnieniem kosztu zakupu karty

lub

poprawny sposób obliczenia kwoty zaoszczędzonej dzięki zakupowi karty rabatowej

P₀ – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu

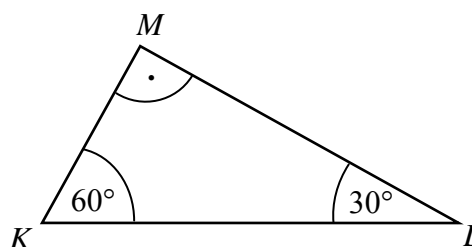
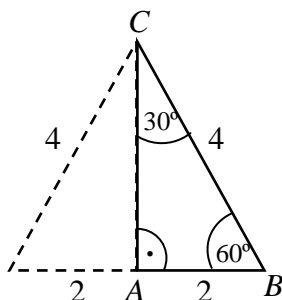
rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

Zadanie 22. (0–2)

Przykładowe sposoby rozwiązania

I sposób

$$|\sphericalangle KLM| = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$



W trójkącie ABC przyprostokątna AB jest połową przeciwprostokątnej BC , co oznacza, że trójkąt ABC jest połową trójkąta równobocznego, czyli jego kąty ostre mają miary 30° i 60° . Miary kątów tych trójkątów są równe, zatem trójkąty ABC i KLM są podobne.

II sposób

Obliczamy długość boku AC

$$|AC| = 2\sqrt{3}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń uwzględniających zależności: $|KM| = x$, $|ML| = x\sqrt{3}$, $|KL| = 2x$, $|AC| = 2\sqrt{3}$ i obliczeniu stosunku odpowiednich boków otrzymujemy:

$$\frac{|KL|}{|CB|} = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}, \quad \frac{|KM|}{|AB|} = \frac{x}{2}, \quad \frac{|ML|}{|AC|} = \frac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{x}{2}$$

Wniosek

Odpowiednie boki trójkątów KLM i ABC są proporcjonalne, zatem trójkąty są podobne.

Poziom wykonania

P₆ – 2 punkty – pełne rozwiązanie

uzasadnienie, że trójkąty są podobne na podstawie równości kątów (I sposób)

lub

uzasadnienie, że długości odpowiednich boków trójkątów są proporcjonalne (II sposób)

P₄ – 1 punkt – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończony lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne
 zapisanie miary co najmniej jednego z kątów ostrych w trójkącie ABC oraz stwierdzenie, że trójkąty są podobne
 lub
 uzasadnienie, że w trójkącie ABC jeden z kątów ostrych ma miarę 60° (30°)
 lub
 zapisanie zależności między długościami boków trójkąta KLM ($x, x\sqrt{3}, 2x$)

P₀ – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu
 rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania

Zadanie 23. (0–3)

Przykładowe sposoby rozwiązania

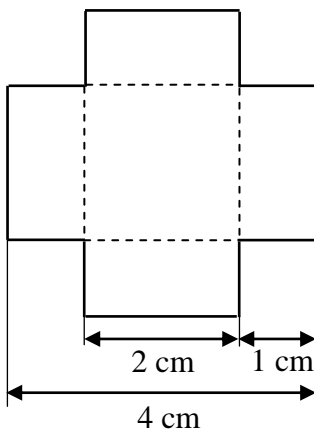
I sposób

a – długość krawędzi sześcianu

$$a = 4 \text{ cm}$$

Pole powierzchni sześcianu jest równe

$$P_c = 4 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 6 = 96 \text{ cm}^2$$



Pole jednej ściany bryły powstałej po usunięciu z narożników małych sześcianów jest równe

$$P_1 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 4 = 2(2 + 1 \cdot 4) = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

lub

$$P_1 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8 + 4 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

lub

$$P_1 = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 16 - 4 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Jest 6 takich ścian, zatem ich pole jest równe

$$P = 6 \cdot 12 \text{ cm}^2 = 72 \text{ cm}^2$$

W każdym narożniku powstałej bryły są trzy ściany o polu 1 cm^2 każda, więc pole powierzchni tych ścian w ośmiu narożnikach jest równe $8 \cdot 3 \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$.

Pole powierzchni całkowitej powstałej bryły jest równe

$$P_c = 72 + 24 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Odpowiedź. Pole powierzchni powstałej bryły jest równe polu sześcianu.

II sposób

Długość krawędzi sześcianu jest równa 4 cm. Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 16 cm^2 , a całego sześcianu $P_c = 16 \text{ cm}^2 \cdot 6 = 96 \text{ cm}^2$.

Jeżeli z każdego narożnika dużego sześcianu usuniemy po jednym małym sześcianie, to pole powierzchni każdej ściany jest mniejsze o 4 cm^2 i wynosi 12 cm^2 .

Zatem pole powierzchni wszystkich takich ścian jest równe: $6 \cdot 12 \text{ cm}^2 = 72 \text{ cm}^2$.

W ośmiu narożnikach powstałej bryły są po trzy ściany o polu 1 cm^2 każda, więc pole powierzchni wszystkich tych ścian jest równe $8 \cdot 3 \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$.

Zatem pole powierzchni całkowitej powstałej bryły jest równe $P_c = 72 + 24 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$.

Odpowiedź. Pole powierzchni powstałej bryły jest równe polu sześcianu.

III sposób

Sześcian składa się z 64 małych sześcianów o krawędzi 1 cm każdy, więc krawędź tego sześcianu ma długość 4 cm. Pole powierzchni jednej ściany sześcianu jest równe 16 cm^2 , a całego sześcianu $P_c = 16 \text{ cm}^2 \cdot 6 = 96 \text{ cm}^2$.

Jeżeli z każdego narożnika dużego sześcianu usuniemy po jednym małym sześcianie, to pole powierzchni całkowitej nie zmieni się, ponieważ liczba ścian usuniętych i pozostałych w każdym narożniku powstałej bryły jest taka sama.

Zatem pole powierzchni powstałej bryły jest równe 96 cm^2 .

Odpowiedź. Pola powierzchni obu brył są równe.

Poziom wykonania

P₆ – 3 punkty – pełne rozwiązanie

obliczenie pól powierzchni obu brył i zapisanie wniosku o równości pól

lub

obliczenie pola powierzchni sześcianu (96 cm^2) i uzasadnienie, że pole powierzchni powstałej bryły jest równe polu powierzchni sześcianu

P₄ – 2 punkty – zasadnicze trudności zadania zostały pokonane bezbłędnie, ale rozwiązanie nie zostało dokończony lub dalsza część rozwiązania zawiera poważne błędy merytoryczne

obliczenie pola powierzchni powstałej bryły (96 cm^2), bez obliczenia pola powierzchni sześcianu

lub

obliczenie pola powierzchni sześcianu (96 cm^2) i zapisanie wniosku o równości pól obu brył bez uzasadnienia

lub

obliczenie pola powierzchni sześcianu (96 cm^2) i pola powierzchni ścian w kształcie „krzyża” w powstałej bryle (72 cm^2)

lub

obliczenie pola powierzchni sześcianu (96 cm^2) i pola powierzchni ścian w narożach powstałej bryły (24 cm^2)

P₂ – 1 punkt – dokonano istotnego postępu, ale zasadnicze trudności zadania nie zostały pokonane

poprawny sposób obliczenia pola powierzchni sześcianu

lub

poprawny sposób obliczenia pola jednej ściany w kształcie „krzyża” w powstałej bryle

lub

poprawny sposób obliczenia pola powierzchni trzech ścian w narożu po usunięciu małego sześcianu

P₀ – 0 punktów – rozwiązanie niestanowiące postępu

rozwiązanie błędne lub brak rozwiązania